

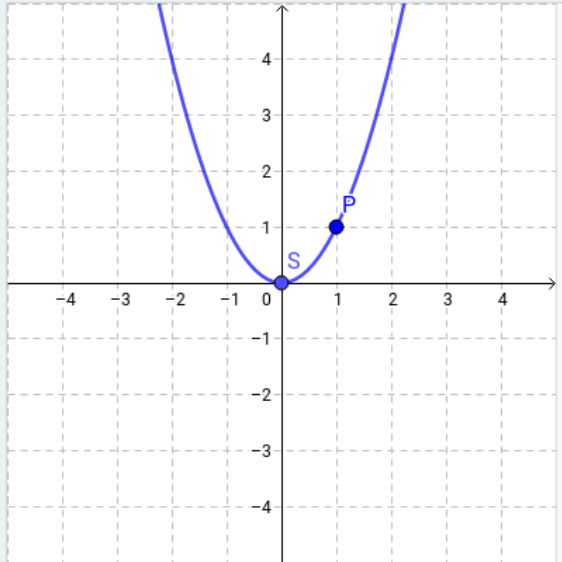
AuthOMath (2022-2024) :  
Die Potentiale von STACK und GeoGebra  
technisch verknüpfen und didaktisch reflektiert nutzen



Guido Pinkernell ◦ Tim Lutz

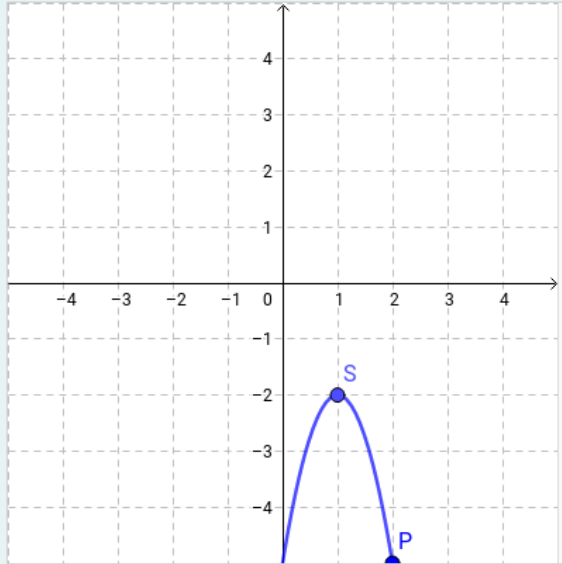
AK MdW Jahrestreffen ◦ PH Freiburg ◦ Oktober 2023

Move the points S und P,  
such that the graph fits with  
 $f(x) = -3 \cdot (x + 1)^2 - 2$ .



Check

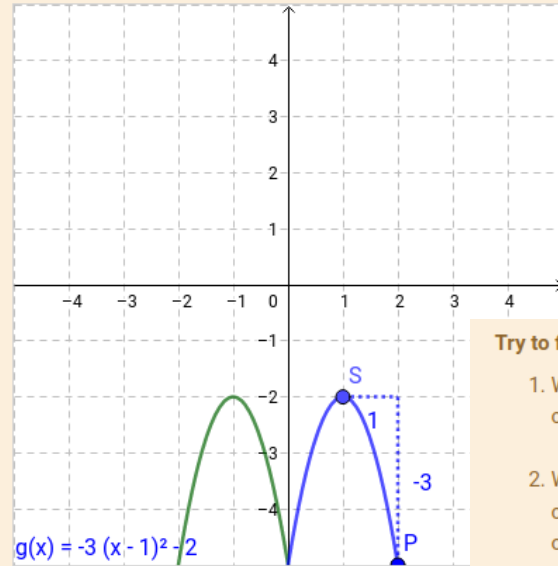
Move the points S und P,  
such that the graph fits with  
 $f(x) = -3 \cdot (x + 1)^2 - 2$ .



Check

**Wrong, too bad!**

The green graph would be correct.



**Why?**

You can find out yourself.

Correct your blue graph  
and watch how the expression changes.

**Try to find answers to the following questions:**

1. Where in the expression  
can you see the coordinates of the vertex?
2. Where in the expression  
can you see a value for the opening  
of the parabola?

**Do you have an idea already?**

Then try the task again.

**Or wait 30 seconds  
after which a full solution will appear:**

Musterlösung

# Übersicht

## 1. AuthOMath

- Partner
- Ziele

## 2. DiCo I Theoretische Perspektiven

- Affordances
- TPACK und Lesson Planning
- LLLS

## 3. DiCo II Umsetzung

- Rahmen
- Beispiel



AuthOMath (2022-2024)

Authoring Online Material with  
Multimodal, Dynamic and Interactive Applets  
and Automated Feedback  
for Learning Math



# AuthOMath : Partner



University of Education Heidelberg  
Guido Pinkernell ◦ Gunter Ehret ◦ Tim Lutz



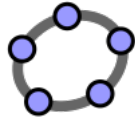
University of Cantabria Santander  
Jose Manuel Diego Mantecon ◦ María Sanz Ruiz ◦ Zaira Ortiz Laso



University of Edinburgh  
Chris Sangwin ◦ George Kinnear ◦ Konstantina Zerva



Johann-Kepler-Universität Linz  
Zsolt Lavica ◦ Mathias Tejera ◦ Guillermo Bautista ◦ Cecilia Russo



Geogebra GmbH (associated)



# AuthOMath : Ziele

## AuTo

- ein Moodle-basiertes Autorentool für randomisierte interaktive und dynamische multimodale Mathematikaufgaben mit automatischem adaptivem Feedback

## DiCo

- ein didaktisches Konzept für die Gestaltung online-basierter interaktiven Lernmaterials für den Einsatz in der Mathematiklehrerbildung



# AuthOMath : Ziele

## AuTo







- ein Moodle-basiertes Autorentool für randomisierte interaktive und dynamische multimodale Mathematikaufgaben mit automatischem adaptivem Feedback

was im Wesentlichen bedeutet, STACK für die Implementierung von GeoGebra-Applets in Aufgaben und Feedback zu erweitern



This picture explains  
how two fractions are added.

Translate into numbers:

	+		+		+		
=		+		=		+	
=			=				

```
n1:rand([2,3,4,5]);
n2:rand_with_prohib(2,5,[n1]);
z1:rand(n1-1)+1;
z2:rand(n2-1)+1;
```

↴ A ▾ B I ≡ ≡ ≡ ≡ 🔗 🔄 🖼️ 📄 🎤 📹 📄 H:P  
U 🔗 x<sub>2</sub> x<sup>2</sup> ≡ ≡ ≡ 🧮 ✍️ 📊 📏 🔄 🔄 🌐 🔍 </>

```
1 <br>This visualization shows<br>how two fractions are added.<br><br>Tra
2 |
3 <table style="border-collapse: collapse; width: 400px;" border="0">
4   <tbody>
5     <tr>
6       <td style="width: 180px; vertical-align: bottom; border-sty
7
8         [[geogebra set="n1,n2,z1,z2,x1,y1,x2,y2"]]
9         params["material_id"] = "yqhjpr2c";
10        params["width"] = 450;
11        params["height"] = 550;
12        params["borderColor"] = "rgba(0, 0, 0, 0)";
13        params["transparentGraphics"]= true;
14        params["scale"] = 0.5;
15        [[/geogebra]]
16
17    </td>
```

names of variables in applet, with

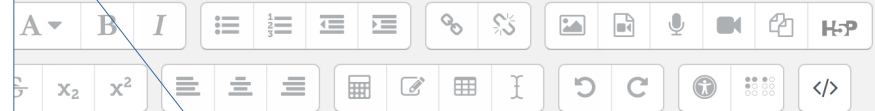
set: transmit values from STACK to applet  
watch: read values from applet into STACK on "Check"  
remember: remember values for reloading applet

applet ID on geogebra.org

## GeoGebra App Parameters

[https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra\\_App\\_Parameters](https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_App_Parameters)

```
n1:rand([2,3,4,5]);  
n2:rand_with_prohib(2,5,[n1]);  
z1:rand(n1-1)+1;  
z2:rand(n2-1)+1;
```



>This visualization shows<br>how two fractions are added.<br><br>Tra

```
2 |  
3 | <table style="border-collapse: collapse; width: 400px;" border="0">  
4 |   <tbody>  
5 |     <tr>  
6 |       <td style="width: 180px; vertical-align: bottom; border-sty  
7 |  
8 |         [[geogebra_set="n1,n2,z1,z2,x1,y1,x2,y2"]]  
9 |         params["material_id"] = "yqhjpr2c";  
10 |        params["width"] = 450;  
11 |        params["height"] = 550;  
        params["borderColor"] = "rgba(0, 0, 0, 0)";  
        params["transparentGraphics"]= true;  
        params["scale"] = 0.5;  
        [[/geogebra]]  
17 |     </td>
```

# Übersicht

## 1. AuthOMath

- Partner
- Ziele

## 2. DiCo I Theoretische Perspektiven

- Affordances
- TPACK und Lesson Planning
- LLLS

## 3. DiCo II Umsetzung

- Rahmen
- Beispiel

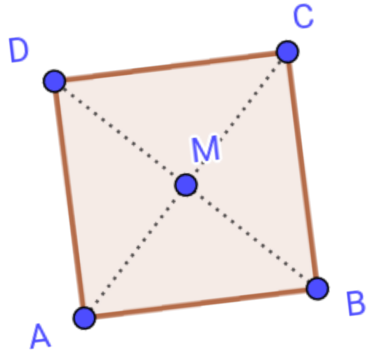


# Theoretische Perspektiven

## DiCo

- ein didaktisches Konzept für die Gestaltung online-basierter interaktiven Lernmaterials für den Einsatz in der Mathematiklehrerbildung

# Theoretische Perspektiven



This is not a square.

Move points  
to explore the range of appearances,  
and then decide on  
what this quadrangle really is.

## GeoGebra

- multirepräsentational,  
dynamisch,  
interaktiv
- mathematische Objekte durch  
Definieren und Skizzieren erzeugen
- WYSIWYG
- schulische  
Community

# Theoretische Perspektiven

## STACK

- randomisierte Aufgaben
- automatisiertes antwortbasiertes Feedback
- Kodieren
- akademische Community

## GeoGebra

- multirepräsentational, dynamisch, interaktiv
- mathematische Objekte durch Definieren und Skizzieren erzeugen
- WYSIWYG
- schulische Community

# Theoretische Perspektiven

## STACK

- randomisierte Aufgaben
- automatisiertes antwortbasiertes Feedback
- Kodieren
- akademische Community

Give a quadratic expression which has exactly the two roots  $-3$  und  $-1$  .

$$f(x) = (x-3)*(x-1)$$

**NEARLY correct, but not quite!**

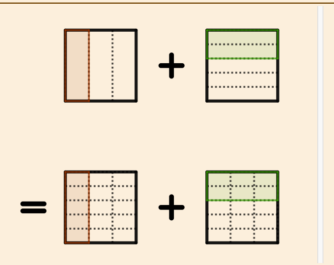
You seem to know what to do.  
Just check your answer...

Calculate:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$$

**Wrong, sorry!**

Maybe this visualisation of the first step helps you to find your mistake?



# Theoretische Perspektiven

## STACK

- randomisierte Aufgaben
- automatisiertes antwortbasiertes Feedback
- Kodieren
- akademische Community

"Subtract from 3 the sum of  $x$  and 2 and you get 10."

Translate into an equation:

$3-x+2=10$

**Well, yes and no.**

You have translated all the words correctly into algebra.

But you should think of "the sum of  $x$  and 2" as a whole that needs to be subtracted from 3.

**Do you know now what to do?**

Then try again!

**Or wait 30 seconds for a full solution:**

**click for How to translate:**

"the sum of  $x$  and 2" translates into  $x + 2$ ,

after which "Subtract from 3 the sum  $x + 2$  and you get 10" translates into  $3 - (x + 2) = 10$  übersetzt.

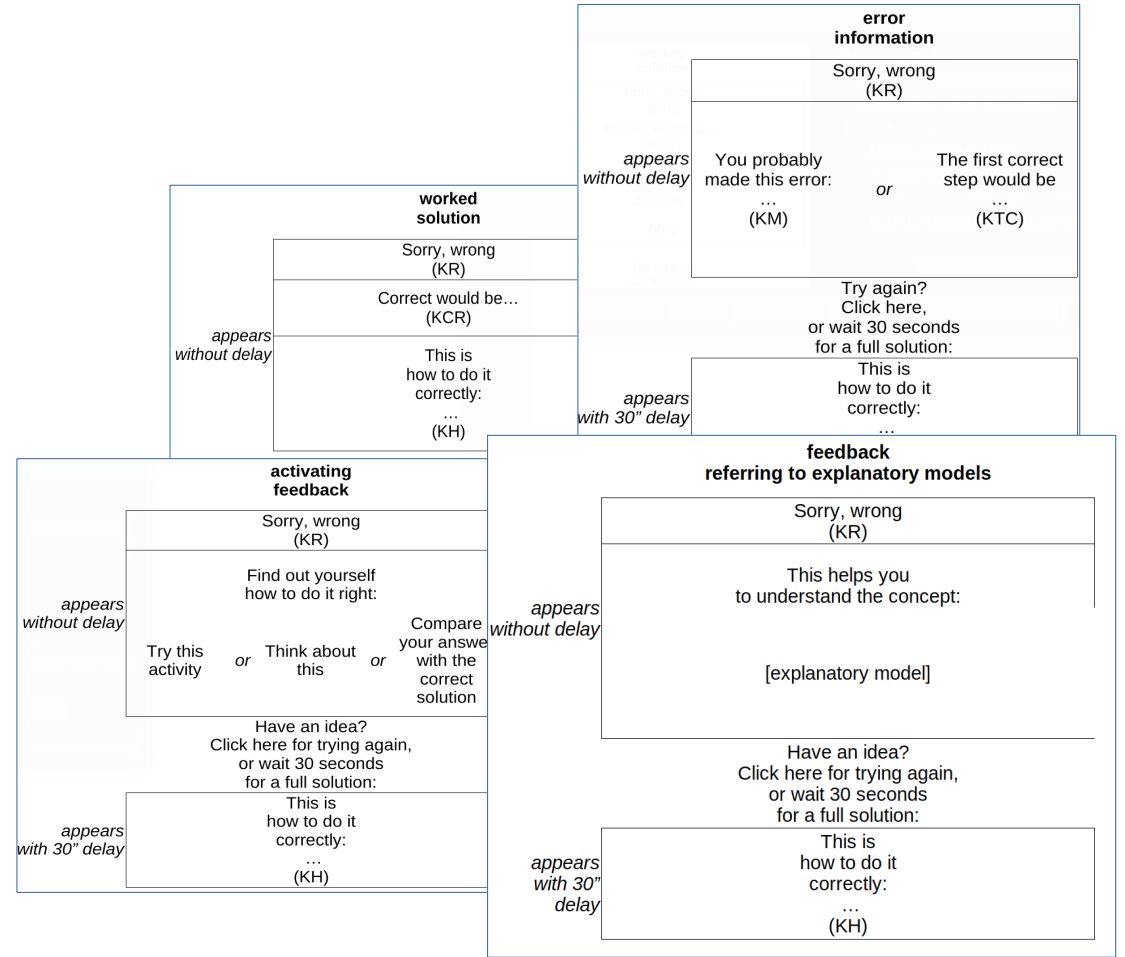
**Try again!**



# Theoretische Perspektiven

## STACK

- randomisierte Aufgaben
- automatisiertes antwortbasiertes Feedback
- Kodieren
- akademische Community



# Theoretische Perspektiven

## STACK

- randomisierte Aufgaben
- automatisiertes antwortbasiertes Feedback
- Kodieren
- akademische Community

Give an example of a set of vectors that span  $\mathbb{R}^3$  Tidy STACK

✓ **Correct answer, well done.**  
This set spans  $\mathbb{R}^3$

Give another example of a set of vectors that span  $\mathbb{R}^3$ , that does not contain the standard basis vectors.

✓ **Correct answer, well done.**  
This set spans  $\mathbb{R}^3$

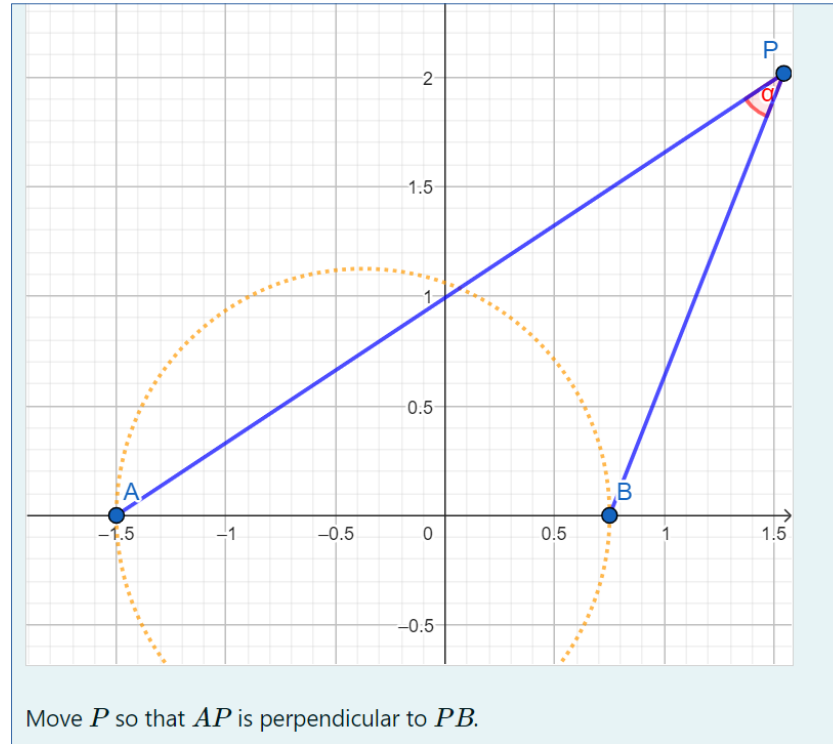
Give an example of a set of more than 3 vectors that span  $\mathbb{R}^3$ . If no such example exists enter none.

# Theoretische Perspektiven : Affordances

affordances

“the potential for action  
inherent in the features  
of the setting”

# Theoretische Perspektiven : Affordances



# Theoretische Perspektiven : Affordances

affordances

“the potential for action  
inherent in the features  
of the setting”

constraints

“the structure imposed by  
the setting [that] may  
facilitate task progress”

# Theoretische Perspektiven : Affordances

- STACK

- Randomisierung:

- Antizipation eines sachangemessenen und adressatenspezifischen Anforderungs- und Lösungsraums

- Feedback:

- Antizipation adressatenspezifischer Konzepte und Fehlkonzepte mit jeweils passenden Unterstützungsimpulsen

- GeoGebra

- Repräsentation, Dynamik, Interaktion:

- Analyse sachangemessener und adressatenspezifischer Zugänge zum Lerngegenstand sowie Konzeption adressatenspezifischen Feedbacks

Fachliche Analyse des Lerngegenstands und der möglichen Zugänge sowie didaktische Analyse von (auch fehlerhaften) Konzeptualisierungen

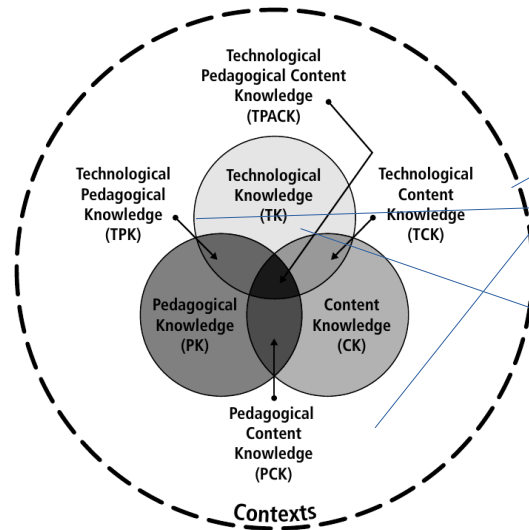
Analyse der affordances und constraints von STACK & GeoGebra für die Repräsentation des Lerngegenstands

Analyse der affordances und constraints von STACK & GeoGebra für die Lernsituation

Programmierkenntnisse für die Erstellung von anforderungsangemessenen Aufgaben mit STACK & GeoGebra

# Theoretische Perspektiven : TPACK

## Wissensmodellierung: TPACK, kontextualisiert



CK & PCK  
Fachliche Analyse  
des Lerngegenstands  
und der möglichen Zugänge  
sowie didaktische Analyse von (auch  
fehlerhaften) Konzeptualisierungen

TCK  
Analyse der  
affordances und constraints  
von STACK & GeoGebra  
für die Repräsentation  
des Lerngegenstands

TPK  
Analyse der  
affordances und constraints  
von STACK & GeoGebra  
für die Lernsituation

TK  
Programmierkenntnisse  
für die Erstellung von anforderungs-  
angemessenen Aufgaben  
mit STACK & GeoGebra

# Theoretische Perspektiven : TPACK lokalisiert

Kompatibilität mit lokalem  
Ausbildungscurriculum

A) Sachanalyse

B) Didaktische  
Analyse

C) Methodische  
Entscheidungen

CK & PCK  
Fachliche Analyse  
des Lerngegenstands  
und der möglichen Zugänge  
sowie didaktische Analyse von (auch  
fehlerhaften) Konzeptualisierungen

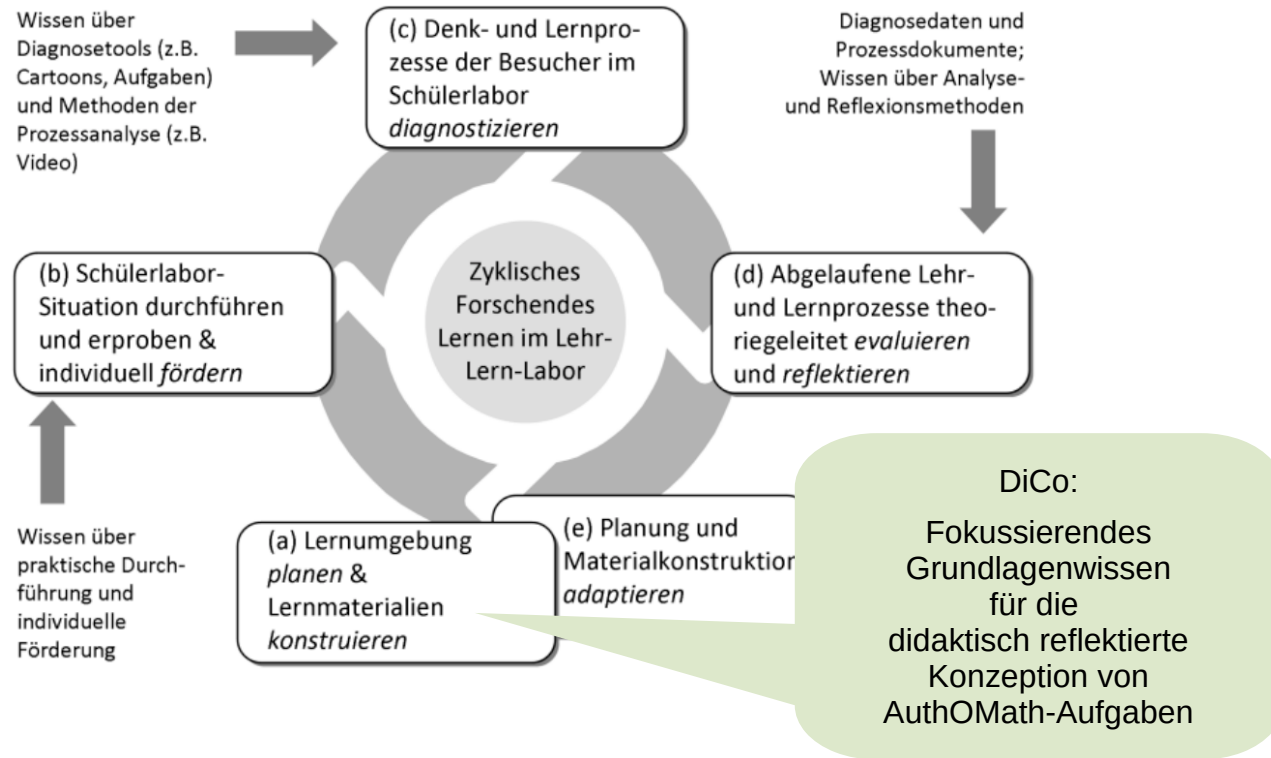
TCK  
Analyse der  
affordances und constraints  
von STACK & GeoGebra  
für die Repräsentation  
des Lerngegenstands

TPK  
Analyse der  
affordances und constraints  
von STACK & GeoGebra  
für die Lernsituation

TK  
Programmierkenntnisse  
für die Erstellung von anforderungs-  
angemessenen Aufgaben  
mit STACK & GeoGebra



# Theoretische Perspektiven : LLLS



# Übersicht

1. AuthOMath
  - Partner
  - Ziele
2. DiCo I Theoretische Perspektiven
  - LLLS
  - Affordances
  - TPACK
3. DiCo II Umsetzung
  - Rahmen
  - Beispiel



# Umsetzung : Rahmen

“Content”

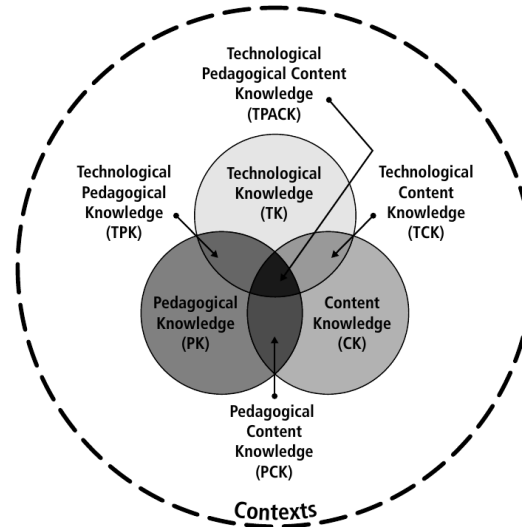
Lerngegenstände  
der Primar- und  
Sekundarstufenmathematik

“Pedagogy”

adressatenspezifische  
Zugänge sowie  
Konzeptionalisierungen  
und Fehlkonzepte

“Technology”

in AuthOMath kombinierte  
Autorensysteme  
STACK & GeoGebra



# Umsetzung : Rahmen

“Content”

Lerngegenstände  
der Primar- und  
Sekundarstufenmathematik

“Pedagogy”

adressatenspezifische  
Zugänge sowie  
Konzeptionalisierungen  
und Fehlkonzepte

“Technology”

in AuthOMath kombinierte  
Autorensysteme  
STACK & GeoGebra

Sachanalyse:

Sie haben sich für ein Thema entschieden.  
Welche Aspekte von Wissen und Können  
umfasst dieses Thema?



**WIGORA**

- Ein **Orientierungsrahmen** für die Konkretisierung von Anforderungen an das Beherrschen und Verstehen zentraler Begriffe und Verfahren
- Die Frage „Was muss man beherrschen?“ wird durch „**Wie** muss man es beherrschen?“ ergänzt.
- Fachdidaktische Perspektive auf das „Verstehen von Inhalten“ in Form **etablierter, kommunizierbarer und operationalisierbarer** Modelle

# Umsetzung : Rahmen

“Content”

Lerngegenstände  
der Primar- und  
Sekundarstufenmathematik

“Pedagogy”

adressatenspezifische  
Zugänge sowie  
Konzeptionalisierungen  
und Fehlkonzepte

“Technology”

in AuthOMath kombinierte  
Autorensysteme  
STACK & GeoGebra

**Didaktische Analyse:**  
Wie können Lernende das Thema erfassen.  
Welche Fehlvorstellungen könnten sie  
entwickeln?

Fehler als “mislungener conceptual change”

- ein conceptual change erfordert das Überwinden einer Denkhürde, die sich als Diskrepanz zwischen Gewohntem und Neuem ergibt
- gewohnte Denkweisen bei alten Lerninhalten passen nicht mehr bei neuen

fachdidaktische Perspektive:

Wenn die “gewohnten Denkweisen” nicht mehr passen, dann haben sie schon vorher nicht gepasst.

Denn offensichtlich erfassen sie den Lerngegenstand nicht in seiner ganzen mathematische Bedeutungsbreite.

Prediger, 2007

Aspekt	Natürliche Zahlen
Kardinalität	Eine Zahl auf die
Symbolische Repräsentation	eindeutige Repräsentation
Ordnung	unterschiedliche
Addition – Subtraktion	unterschiedliche
Multiplikation	Multiplikation (außer 0)
Division	Division

# Umsetzung : Rahmen

“Content”

Lerngegenstände  
der Primar- und  
Sekundarstufenmathematik

“Pedagogy”

adressatenspezifische  
Zugänge sowie  
Konzeptionalisierungen  
und Fehlkonzepte

“Technology”

in AuthOMath kombinierte  
Autorensysteme  
STACK & GeoGebra

**Aufgabenanalyse:**  
**Wie soll die Aufgabe, wie soll das Feedback  
formuliert und gestaltet werden,  
damit sie verständlich und lernfördernd wirken können?**

## Merkmale von Aufgabe und Feedback

- für “Experten”

KR, KM (nur Hinweis auf gemachten Fehler)  
oder KH (nur Hinweis auf mögliche Vorgehensweise)  
scheint ausreichen  
(Chi, Siler, Jeong, Yamauchi & Hausmann, 2001; Quintana, Zhang & Krajcik,  
2005; Johnson & Priest, 2005; Ras et al., 2016)

- für “Novizen”

KH (hier schrittweise Unterstützung, i.e. “scaffolding”  
oder Musterlösung) ist notwendig  
(Kirschner, Sweller & Clark, 2006; Renkl, 2002;  
Renkl & Atkinson, 2003)

- Aufgabe
  - Variationen
  - ...
- Feedback
  - **Inhalte**
  - Timing
  - Struktur

# Übersicht

1. AuthOMath
  - Partner
  - Ziele
2. DiCo I Theoretische Perspektiven
  - LLLS
  - Affordances
  - TPACK
3. DiCo II Umsetzung
  - Rahmen
  - Beispiel

